

积分基础知识

单变量函数的积分学是数学分析的核心内容之一，源于求曲边梯形面积、变速运动路程等实际问题。本文参考 中国科学技术大学数学分析讲义 § 5.1，按 **由浅入深、循序渐进** 的方式梳理 Riemann 定积分的基础知识：从定义与可积性出发，经基本性质与微积分基本定理，到换元、分部积分等计算方法，并附常用公式与典型技巧。

导读：学习路径

阶段	章节	核心内容	目标
入门	§ 1– § 2	几何背景、Riemann 和、可积函数类	理解积分定义，判断函数是否可积
性质	§ 3– § 4	线性性、区间可加、保序、估值、中值定理	比较、估计积分，不直接计算
核心定理	§ 5	变上限积分、原函数、Newton–Leibniz 公式	把积分与导数联系起来
计算	§ 6– § 8	换元、分部积分、对称性、递推、Riemann 和极限	会算常见积分
拓展	§ 9	非初等积分、用积分定义新函数	了解积分的理论边界

建议：先掌握 Newton–Leibniz 公式（§ 5），再系统练习换元与分部积分（§ 6）。对称区间上的奇偶性、区间再现等技巧（§ 7）可大幅减少计算量。

§ 1 积分的定义

1.1 几何背景：曲边梯形的面积

设 $y = f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上连续。将区间 $[a, b]$ 分割为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，用矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$) 近似"小长条"面积。把所有矩形面积相加得 **Riemann 和**

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当分割越来越细时，若 S_n 的极限存在且与分割方式、取样点 ξ_i 无关，该极限即为曲边梯形的面积。

类似地，变速直线运动在 $[\alpha, \beta]$ 上的路程也可通过"分段匀速近似、再取极限"得到。

术语： $f(x)$ 为被积函数； a 为积分下限， b 为积分上限； $f(x)dx$ 为被积表达式； x 为积分变量。

ε - δ 表述： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，只要 $\|T\| < \delta$ ，无论 ξ_i 如何取，都有 $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon$ 。

注意：定义中有两个"任意"——分割的任意性、取样点 ξ_i 的任意性。积分值与积分变量名称无关：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt.$$

§ 2 可积函数类

经典反例：Dirichlet 函数（有界但不可积）

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

在 $[a, b]$ 上任一分割，每个小区间上 D 同时取到 0 和 1，Riemann 和极限不存在。

例（改变单点函数值不影响积分）：设 $a < c < b$,

$$J(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b], x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$$

则 $\int_a^b J(x) dx = 0$ 。有限个点上的函数值变化不影响 Riemann 积分。

§ 3 积分的基本性质

3.1 区间约定与可加性

为方便，约定：

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0; \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad (a > b).$$

在此约定下，对可积的 f 及任意 a, b, c ，恒有

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

3.2 线性性

若 f, g 在 $[a, b]$ 上可积， α, β 为常数，则 $\alpha f + \beta g$ 可积，且

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

进一步， $f \cdot g$ 也在 $[a, b]$ 上可积。

3.3 保序性与估值

条件	结论
$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$	$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$
$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$	$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$
f 连续, $f \geq 0$ 且 $f \not\equiv 0$	$\int_a^b f(x) \, dx > 0$
$m \leq f(x) \leq M$	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$

例（比较大小）：在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上， $0 \leq \sin x \leq 1$ ，故 $\sin^{10} x \leq \sin^2 x$ ，从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

例（估值）：在 $[0, 1]$ 上， $0 \leq x^9 \leq 1$ 且 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$ ，故

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \, dx \leq 1.$$

§ 4 积分中值定理

应用：估计含参积分极限。例如 $p > 0$ 时，由第一中值定理，

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} \cdot p = 0 \quad (\xi_n \in (n, n+p)).$$

§ 5 微积分基本定理

5.1 变上限积分

设 f 在 $[a, b]$ 上可积。对 $x \in [a, b]$ ，定义

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

为 f 的变上限积分（积分上限函数）。

条件	结论
f 在 $[a, b]$ 上可积	$\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
f 在 x_0 处连续	$\Phi(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\Phi'(x_0) = f(x_0)$
f 在 $[a, b]$ 上连续	$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

5.2 原函数与 Newton-Leibniz 公式

注意：可积与原函数存在性并不等价。

- 原函数存在，导函数未必可积： $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ ($x \neq 0$)， $F(0) = 0$ ，则 F 可导，但 F' 在 $[-1, 1]$ 上无界，不可积。
- 函数可积，原函数未必存在： $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上可积，但无原函数（否则与 Darboux 定理矛盾）。

5.3 变限求导公式

设 f 在 $[a, b]$ 上连续， $u(x), v(x)$ 在 (α, β) 上可导且取值于 $[a, b]$ ，则

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

例：

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} dt = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = \cos(\pi \cos^2 x)(-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x) \cos x.$$

§ 6 积分的计算方法

6.1 Newton-Leibniz 公式（直接法）

先求原函数，再代入上下限。基本初等函数的原函数见 附录 A。

例：

$$\int_0^1 (1-2t+t^2) dt = \left[t - t^2 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

6.2 换元积分法

不定积分换元示例：

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) \xrightarrow{t=\ln x} \int t dt = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

定积分换元示例：

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \xrightarrow{t=\ln x} \int_0^{\ln 2} t dt = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

换元陷阱： $\int_{-1}^1 x^2 dx$ 若令 $t = x^2$ ，则 $t \in [0, 1]$ 但上下限均变为 1，得 0——违反定理条件。正确做法：拆分为 $\int_{-1}^0 + \int_0^1$ ，或在 $[-1, 0]$ 、 $[0, 1]$ 上分别换元。

经典换元： $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \xrightarrow{x=a \sin t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{2}$ （半圆面积）。

6.3 分部积分法

例：

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2(1+x^2)} \, dx.$$

口诀： u 优先选对数、反三角、多项式； dv 优先选指数、三角、微分形式简单的部分。

6.4 区间再现公式

设 f 在 $[0, a]$ 上连续，则

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$

令 $x = a - x$ 即可。特别地，对连续 f ：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx.$$

§ 7 对称性与特殊技巧

7.1 奇偶函数

设 f 在 $[-l, l]$ 上连续：

类型	公式
奇函数 $f(-x) = -f(x)$	$\int_{-l}^l f(x) \, dx = 0$
偶函数 $f(-x) = f(x)$	$\int_{-l}^l f(x) \, dx = 2 \int_0^l f(x) \, dx$

7.2 区间中心对称

设 f 在 $[a, b]$ 上连续，中点 $c = \frac{a+b}{2}$ ：

- 若 $f(a+b-x) = -f(x)$ （关于 c 奇对称），则 $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ ；
- 若 $f(a+b-x) = f(x)$ （关于 c 偶对称），则 $\int_a^b f(x) \, dx = 2 \int_a^c f(x) \, dx$ 。

技巧：对 $\int_a^b f(x) \, dx$ 令 $t = a+b-x$ ，检验 f 是否具有上述对称性。

7.3 周期函数

设 f 以 T 为周期的连续函数，则对任意 α ：

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^T f(x) \mathrm{d}x.$$

7.4 乘积对称公式

设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续， $f(a+b-x) = f(x)$ ， $g(a+b-x) + g(x) = A$ （常数），则

$$\int_a^b f(x)g(x) \mathrm{d}x = \frac{A}{2} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

经典推论（ f 在 $[0, 1]$ 上连续）：

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x.$$

7.5 倒数对称（ $x \leftrightarrow 1/x$ ）

设 $a > 1$ ， f, g 在 $[\frac{1}{a}, a]$ 上连续， $f(x) = f(1/x)$ ， $g(x) + g(1/x) = A$ ，则

$$\int_{1/a}^a \frac{f(x)g(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{A}{2} \int_{1/a}^a \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = A \int_1^a \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

7.6 递推公式

Wallis 型（ $m \in \mathbb{N}$ ）：

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为偶数} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

递推关系： $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

§ 8 Riemann 和求极限

许多数列极限可改写为定积分。核心思路：将 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 识别为某函数在 $[a, b]$ 上的 Riemann 和。

例：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n\sqrt{n^2 + i^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i/n}{n\sqrt{1 + (i/n)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(1+i/n)}{n+i} \approx \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 \ln(1+x) d(\ln(1+x)) = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

(具体题目需根据通项精确识别 f 与区间。)

§ 9 用积分定义函数

不少初等函数的积分不能用初等函数表示，如

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \sin(x^2) dx.$$

此时可用积分定义新函数，并研究其性质。

例：用积分定义 $\ln x$

定义 $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$ 。由微积分基本定理, $f'(x) = 1/x$; $f(1) = 0$ 。对 $x, y > 0$, 换元可证

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

进而得到 $f(x^n) = nf(x)$ 、 $f(1/x) = -f(x)$ 等性质，可将 f 记为 $\ln x$ 。

椭圆积分（不能用初等函数表示）：

$$u(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx$$

其中 k 为参数，在力学与几何中有重要应用。

§ 10 Taylor 余项的积分表示

设 f 在区间上有直到 $n+1$ 阶连续导数，则带积分余项的 Taylor 公式为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

由积分中值定理可进一步得到 Cauchy 余项：

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n, \quad \xi \in (a, x).$$

令 $h = x - a$, $\xi = a + \theta h$ ($\theta \in (0, 1)$), 则

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{n!} h^{n+1} (1 - \theta)^n.$$

附录 A 常用积分公式

A.1 幂函数与基本初等函数

积分	结果 (+C)	条件
$\int x^\mu \mathrm{d}x$	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$	$\mu \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$	$\ln \ x\ $	$x \neq 0$
$\int e^x \mathrm{d}x$	e^x	
$\int a^x \mathrm{d}x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x \mathrm{d}x$	$-\cos x$	
$\int \cos x \mathrm{d}x$	$\sin x$	
$\int \sec^2 x \mathrm{d}x$	$\tan x$	
$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$	$\arctan x$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$	$\arcsin x$	$\ x\ < 1$

A.2 常用定积分

积分	结果
$\int_0^a x^k \mathrm{d}x$	$\frac{a^{k+1}}{k+1}, k \neq -1$
$\int_a^b x^\mu \mathrm{d}x$	$\frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}, \mu \neq -1, b > a > 0$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \mathrm{d}x$	见 § 7.6 Wallis 公式

积分	结果
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$	$\sqrt{\pi}$

A.3 与线性代数/内积的联系

在多项式空间 $P_n(t)$ 上，区间积分内积

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

是定义范数 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ 的自然方式。例如

$$\|1 - t\|_{[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 (1 - t)^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

附录 B 记号一览

记号	含义
$\int_a^b f(x) dx$	f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 定积分
$\ T\ $	分割 T 的模（最大子区间长度）
$S_n(T)$	对应分割 T 的 Riemann 和
$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$	变上限积分
$\left.F(x)\right _a^b$	$_a^bF$
$f \in R[a, b]$	f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积
$C[a, b]$	$[a, b]$ 上连续函数全体

参考文献

- 中国科学技术大学数学分析课程讲义：§ 5.1 积分
- 华东师范大学数学系：《数学分析》（第四版）上册，第五章

