

模拟1 解答

第1题（10分）

已知 4×5 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

经初等行变换，得行阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的满秩分解和 A^+

解：

由行阶梯形，主元在第 1、4 列，故 $\text{rank}(A) = 2$ 。

继续化为行最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

读出列向量关系（记 c_i 为 A 的第 i 列）： $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1$, $c_5 = 2c_1 - c_4$ 。

取两个线性无关列作 F ，系数矩阵作 G ，得满秩分解 $A = FG$ ($F \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, $G \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \\ 2 & 12 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

验证： $FG = A$ 。

由满秩分解 $A = FG$ ，可知 $A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^T F)^{-1}F^T$ 。

先算 GG^T 。 G 为 2×5 ，故 GG^T 为 2×2 ，其 (i, j) 元为 G 的第 i 行与第 j 行的内积：

$$\begin{aligned}(GG^T)_{11} &= 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 = 10, \\(GG^T)_{12} &= (GG^T)_{21} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -2, \\(GG^T)_{22} &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2,\end{aligned}$$

得

$$GG^T = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

求逆： $\det(GG^T) = 10 \times 2 - (-2)^2 = 16$ ，故

$$(GG^T)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

又

$$F^T F = \begin{pmatrix} 7 & 36 \\ 36 & 200 \end{pmatrix}, \quad (F^T F)^{-1} = \frac{1}{104} \begin{pmatrix} 200 & -36 \\ -36 & 7 \end{pmatrix}$$

代入计算，得

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{52} & \frac{-53}{416} & \frac{-5}{208} & \frac{-5}{416} \\ \frac{3}{26} & \frac{-53}{208} & \frac{-5}{104} & \frac{-5}{208} \\ \frac{1}{52} & \frac{-9}{416} & \frac{7}{208} & \frac{7}{416} \\ \frac{5}{52} & \frac{-97}{416} & \frac{-17}{208} & \frac{-17}{416} \end{pmatrix}$$

(2) 求 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解，其中 $b = (1, -1, 1, -1)^T$

解：

因 $\text{rank}(A) = 2 < 4$ ，而 $b \in \mathbb{R}^4$ ，方程组不相容。极小范数最小二乘解为：

$$x = A^+ b$$

$$\text{计算：} x = \left(\frac{9}{52}, \frac{9}{26}, \frac{9}{52}, \frac{3}{52}, \frac{15}{52} \right)^T$$

此时 $Ax = AA^+ b$ ，为 b 在 $\mathcal{R}(A)$ 上的正交投影。

(3) 写出 AA^+ 的 Smith 标准型

解：

先算

$$AA^+ = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{21}{26} & \frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ -\frac{13}{2} & \frac{1}{26} & \frac{13}{10} & \frac{5}{26} \\ \frac{13}{1} & \frac{13}{1} & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{26} & \frac{1}{13} & \frac{1}{26} \end{pmatrix}$$

AA^+ 为对称幂等阵, $\text{rank}(AA^+) = 2$, 特征值为 $1, 1, 0, 0$ 。

在域 $\mathbb{R}$ 上：秩为 2, Smith 标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{Z}$ 上： AA^+ 含分母，先同乘 52 化为整数矩阵

$$B = 52 \cdot AA^+ = \begin{pmatrix} 12 & -20 & 8 & 4 \\ -20 & 42 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 40 & 20 \\ 4 & 2 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(B) = 2$ 。对 B 施以 **初等行、列变换**（只做整数加减与换行换列），化为对角形：

第 1 步：将最小非零元 2 移到 $(1, 1)$ 位—— $R_1 \leftrightarrow R_2, C_1 \leftrightarrow C_4$ ：

$$B \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2, C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 2 & 42 & 4 & -20 \\ 4 & -20 & 8 & 12 \\ 20 & 4 & 40 & 8 \\ 10 & 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

第 2 步：以 $a_{11} = 2$ 为 pivot，消去其余第 1 行、第 1 列元素：

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 10R_1, R_4 \leftarrow R_4 - 5R_1$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 21C_1, C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1, C_4 \leftarrow C_4 + 10C_1$$

得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -104 & 0 & 52 \\ 0 & -416 & 0 & 208 \\ 0 & -208 & 0 & 104 \end{pmatrix}$$

第3步：消去第3、4行（它们由第2行线性表出）：

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2, R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2 \implies \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -104 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第4步：处理右下角子块。注意到第2行中 $-104 = (-2) \times 52$ ，故 $C_2 \leftrightarrow C_4$ ：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & -104 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第5步： $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$ ，消去 $a_{24} = -104$ ：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对角元 $d_1 = 2$, $d_2 = 52$ ，满足 $2 \mid 52$ ，即为 B （亦即 $52 \cdot AA^+$ ）在 $\mathbb{Z}$ 上的 Smith 标准型。

(4) 求 $\|\ln(AA^+ + E)\|_F$

解：

AA^+ 对称，特征值为 $1, 1, 0, 0$ ，故 $AA^+ + E$ 的特征值为 $2, 2, 1, 1$ 。

矩阵函数与特征值同步， $\ln(AA^+ + E)$ 的特征值为 $\ln 2, \ln 2, 0, 0$ 。

Frobenius 范数等于特征值模长的平方和开方：

$$\|\ln(AA^+ + E)\|_F = \sqrt{(\ln 2)^2 + (\ln 2)^2} = \sqrt{2} \ln 2 \approx 0.9803$$

$$\|\ln(AA^+ + E)\|_F = \sqrt{2} \ln 2$$

第2题（10分）

已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 7 & 13 \\ 4 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 2, 3, 3)^T$$

(1) 求 A 的 LU 分解 (L 为单位下三角阵, U 为上三角阵)

解:

用 Doolittle 方法, 主元存入 U , 乘数 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ 存入 L 。

消第 1 列 ($u_{11} = 2$):

$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{6}{2} = 3, \quad l_{41} = \frac{4}{2} = 2$$

更新后第 2 列主元 $u_{22} = 3$ 。

消第 2 列:

$$l_{32} = \frac{6}{3} = 2, \quad l_{42} = \frac{3}{3} = 1$$

更新后第 3 列主元 $u_{33} = 2$ 。

消第 3 列:

$$l_{43} = \frac{6}{2} = 3$$

得

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

验算: $A = LU$ 。

(2) 利用 LU 分解解 $Ax = b$

解:

令 $Ly = b$, 下三角回代:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 + 2y_1 = 2 \Rightarrow y_2 = 0 \\ y_3 + 3y_1 + 2y_2 = 3 \Rightarrow y_3 = 0 \\ y_4 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 \Rightarrow y_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = (1, 0, 0, 1)^T$$

再令 $Ux = y$ ，上三角回代：

$$\begin{cases} 4x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4} \\ 2x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{8} \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{24} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$x = \left(\frac{5}{12}, -\frac{5}{24}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right)^T$$

第3题（10分）

已知

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的 Jordan 标准型 J_A

解：

第一步：求特征值。 计算特征多项式：

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda - 3 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 5)[(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 6] \\ &= (\lambda - 5)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(\lambda - 5)^2. \end{aligned}$$

得特征值 $\lambda_1 = 0$ （代数重数 1）， $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ （代数重数 2）。

第二步：求各特征值的几何重数。 几何重数 $g_i = n - \text{rank}(A - \lambda_i I)$ 。

对 $\lambda = 0$ ：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad g_0 = 3 - 2 = 1.$$

对 $\lambda = 5$:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A - 5I) = 2 \quad \Rightarrow \quad g_5 = 3 - 2 = 1.$$

第三步：确定 Jordan 块。 对每个特征值 λ_i ，块的个数由几何重数 g_i 决定，各块阶数之和由代数重数 n_i 决定，二者联立确定块结构。汇总：

特征值 λ	代数重数	几何重数 g	Jordan 块
0	1	1	一个 1×1 块 $J_1(0)$
5	2	1	一个 2×2 块 $J_2(5)$

($g_5 = 1 < n_5 = 2$: 恰有一个 2 阶块; 若 $g_5 = 2 = n_5$ 则应为两个 1 阶块。)

第四步：写出 J_A 。 取块对角排列 (先 $\lambda = 0$, 后 $\lambda = 5$):

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

即 $J_A = \text{diag}(J_1(0), J_2(5))$, 其中 $J_1(0) = (0)$, $J_2(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 。

(2) 求 $\sin A + \ln(A^3 + E)$ 的 Jordan 标准型

解:

第一步：化为标量函数。 令

$$f(x) = \sin x + \ln(x^3 + 1), \quad f'(x) = \cos x + \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

则 $\sin A + \ln(A^3 + E) = f(A)$ (注意: $\ln(A^3 + E)$ 是对整体 $A^3 + E$ 取对数, 不能拆成 $3 \ln A$)。

第二步：在 Jordan 块上计算 $f(J)$ 。 若 $A = PJ_AP^{-1}$, 则 $f(A) = Pf(J_A)P^{-1}$ 。对 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$,

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots \\ 0 & f(\lambda) & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

由 (1), $J_A = \text{diag}(J_1(0), J_2(5))$, 故

$$f(J_1(0)) = (f(0)) = (0), \quad f(J_2(5)) = \begin{pmatrix} f(5) & f'(5) \\ 0 & f(5) \end{pmatrix}.$$

其中

$$f(0) = \sin 0 + \ln 1 = 0, \quad f(5) = \sin 5 + \ln 126, \quad f'(5) = \cos 5 + \frac{75}{126} = \cos 5 + \frac{25}{42} \neq 0.$$

第三步：化为 Jordan 标准型。 $f(J_2(5))$ 一般还不是标准 Jordan 形——其上超对角元为 $f'(5)$, 不是 1。因 $f'(5) \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} f(5) & f'(5) \\ 0 & f(5) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f(5) & 1 \\ 0 & f(5) \end{pmatrix} = J_2(f(5)),$$

故 $f(5)$ 仍对应一个 2×2 Jordan 块 ($f'(5) = 0$ 时才可能分裂为两个 1×1 块)。

第四步：写出结果。 与 (1) 中块排列一致,

$$J_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(5) & 1 \\ 0 & 0 & f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 5 + \ln 126 & 1 \\ 0 & 0 & \sin 5 + \ln 126 \end{pmatrix}$$

亦可将 $f(5)$ 的块排在前面, 等价地写为 $\text{diag}(J_2(f(5)), J_1(0))$ 。

第4题 (10分)

设 $P_3(t)$ 为次数 ≤ 3 的多项式空间, 对 $f(t) \in P_3(t)$ 定义

$$T(f(t)) = (tf(t))'' + f(1)$$

(1) 求 $R(T)$ 的一组基与 $\dim N(T)$

解:

设 $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, 则 $tf(t) = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$,

$$(tf)'' = 2b + 6ct + 12dt^2, \quad f(1) = a + b + c + d,$$

故

$$T(f) = 2b + 6ct + 12dt^2 + (a + b + c + d).$$

在标准基 $1, t, t^2, t^3$ 下, 逐基向量求像 ($f(1)$ 表示把 t 代入 1 求值)。对每个基向量, 分三步: 算 $(tf)''$ 、算 $f(1)$ 、相加得 $T(f)$, 再写出在标准基下的坐标。

$f(t) = 1$ ($a = 1, b = c = d = 0$): $tf = t$, $(tf)'' = 0$; $f(1) = 1$; $T(1) = 0 + 1 = 1$, 坐标 $(1, 0, 0, 0)^T$ 。

$f(t) = t$ ($b = 1$): $tf = t^2$, $(tf)'' = 2$; $f(1) = 1$; $T(t) = 2 + 1 = 3$, 坐标 $(3, 0, 0, 0)^T$ 。

$f(t) = t^2$ ($c = 1$): $tf = t^3$, $(tf)'' = 6t$; $f(1) = 1$; $T(t^2) = 1 + 6t$, 坐标 $(1, 6, 0, 0)^T$ 。

$f(t) = t^3$ ($d = 1$): $tf = t^4$, $(tf)'' = 12t^2$; $f(1) = 1$; $T(t^3) = 1 + 12t^2$, 坐标 $(1, 0, 12, 0)^T$ 。

汇总:

$f(t)$	$(tf)''$	$f(1)$	$T(f)$
1	0	1	1
t	2	1	3
t^2	$6t$	1	$1 + 6t$
t^3	$12t^2$	1	$1 + 12t^2$

坐标分别为 $(1, 0, 0, 0)^T$ 、 $(3, 0, 0, 0)^T$ 、 $(1, 6, 0, 0)^T$ 、 $(1, 0, 12, 0)^T$, 第 j 列为 $T(t^{j-1})$ 的坐标, 得

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对 $[T]$ 作行化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

主元在第 1, 3, 4 列, $\text{rank}[T] = 3$, 故 $\dim R(T) = 3$ 。

由像向量:

$$1 + 6t = 1 + 6t, \quad 1 + 12t^2 = 1 + 12t^2, \quad 3 = 3 \cdot 1,$$

得 $R(T) = \text{span}\{1, t, t^2\}$ 。一组基为

$$\{1, t, t^2\}$$

$\dim N(T)$: 由秩-零化度定理, $\dim N(T) = n - \text{rank}[T] = 4 - 3 = 1$ 。

$$\dim N(T) = 1$$

(题目只要求核的维数, 不必解 $[T]\alpha = \mathbf{0}$ 求 $N(T)$ 的基向量。若需核的基, 可解得 $N(T) = \text{span}\{t - 3\}$ 。)

(2) 将 $R(T)$ 的基扩充为 $P_3(t)$ 的一组基

解:

$R(T) = \text{span}\{1, t, t^2\}$, 而 $t^3 \notin R(T)$ ($T(f)$ 中最高次项只来自 $(tf)''$, 次数不超过 2)。将 t^3 添入即得 $P_3(t)$ 的一组基:

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

(3) 求 $1 - t - t^2 - t^3$ 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标

解:

在基 $1, t, t^2, t^3$ 下, $1 - t - t^2 - t^3$ 的坐标即为其系数向量:

$$(1, -1, -1, -1)^T$$

验算: $1 \cdot 1 + (-1) \cdot t + (-1) \cdot t^2 + (-1) \cdot t^3 = 1 - t - t^2 - t^3$ 。
