

模拟2 解答

第1题 (10分)

设 $P_2(t)$ 为次数 ≤ 2 的多项式全体构成的线性空间。对任意 $f(t), g(t) \in P_2(t)$ ，定义内积

$$(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

(1) 求多项式 $1 - t$ 的长度

解：

多项式 $1 - t$ 的长度即其在上述内积下的范数：

$$\begin{aligned}\|1 - t\| &= \sqrt{(1 - t, 1 - t)} = \sqrt{\int_0^1 (1 - t)^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (1 - 2t + t^2) dt} = \sqrt{\left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \|1 - t\| &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) 记 $W = \text{span}\{1 - t\}$ ，求 $W^\perp$

解：

$W^\perp = \{p(t) \in P_2(t) \mid (p(t), 1 - t) = 0\}$ 。设 $p(t) = a + bt + ct^2$ ，则

$$(p, 1 - t) = \int_0^1 (a + bt + ct^2)(1 - t) dt = \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12} = 0,$$

即 $6a + 2b + c = 0$ 。该方程有 2 个自由未知量，故 $\dim W^\perp = 2$ 。

取两组无关整数解：

- $a = 1, b = 0, c = -6 \Rightarrow p_1(t) = 1 - 6t^2$;
- $a = 0, b = 1, c = -2 \Rightarrow p_2(t) = t - 2t^2$ 。

可验证 $(p_1, 1 - t) = 0$, $(p_2, 1 - t) = 0$ ，且 p_1, p_2 线性无关。

$$W^\perp = \text{span}\{1 - 6t^2, t - 2t^2\}$$

第2题（10分）

在线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中有下列 5 个向量：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $V = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $W = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。

(1) 证明： $\alpha_2 \in W$

解：

将 2×2 矩阵按列展开为 $\mathbb{R}^4$ 中的向量。设

$$\alpha_2 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3,$$

等价于线性方程组（按列优先向量化）：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵作行化简，得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

有解。取特解 $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}$, $x_3 = -\frac{5}{2}$, 则

$$\alpha_2 = \frac{5}{4}\beta_1 + \frac{7}{4}\beta_2 - \frac{5}{2}\beta_3 \in W.$$

验算：

$$\frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_2.$$

故 $\alpha_2 \in W$ 。

(2) 判别 $V + W$ 是否是直和，并说明理由

解：

$V + W$ 为直和当且仅当 $V \cap W = \{0\}$ （等价地， $V + W$ 中每个向量分解 $v + w$ 唯一）。

由 (1)， $\alpha_2 \in W$ ；又 $\alpha_2 \in V = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ，故 $\alpha_2 \neq 0$ 且 $\alpha_2 \in V \cap W$ 。

因此 $V \cap W \neq \{0\}$ ， $V + W$ 不是直和。

第3题（10分）

已知 4×5 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

经初等行变换，得行阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的满秩分解和 A^+

解：

由行阶梯形，主元在第 1、3 列，故 $\text{rank}(A) = 2$ 。

继续化为行最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

读出列向量关系（记 c_i 为 A 的第 i 列）：

$$c_2 = c_1, \quad c_4 = c_3 - 2c_1, \quad c_5 = 2c_3.$$

取两个线性无关列作 F ，系数矩阵作 G ，得满秩分解 $A = FG$ ($F \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, $G \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

验证: $FG = A$ 。

由满秩分解 $A = FG$ ，Moore–Penrose 广义逆为

$$A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^T F)^{-1}F^T.$$

先算

$$GG^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (GG^T)^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$F^T F = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}, \quad (F^T F)^{-1} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

代入计算，得

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{96} & \frac{7}{288} & -\frac{1}{72} & -\frac{11}{144} \\ \frac{1}{96} & \frac{7}{288} & -\frac{1}{72} & -\frac{11}{144} \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{288} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{144} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{144} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} \end{pmatrix}.$$

(2) 求 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解，其中 $b = (1, 1, 1, 1)^T$

解：

因 $\text{rank}(A) = 2 < 4$ ，而 $b \in \mathbb{R}^4$ ，方程组一般不相容。极小范数最小二乘解为

$$x = A^+ b.$$

计算：

$$x = \left(-\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9} \right)^T$$

此时 $Ax = AA^+b$, 为 b 在 $\mathcal{R}(A)$ 上的正交投影。

(3) 写出 A^+A 的 Smith 标准型

解:

先算

$$A^+A = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

A^+A 为对称幂等阵, $\text{rank}(A^+A) = 2$, 特征值为 $1, 1, 0, 0, 0$ 。

在域 $\mathbb{R}$ 上: 秩为 2, Smith 标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{Z}$ 上: A^+A 含分母, 先同乘 16 化为整数矩阵

$$B = 16 \cdot A^+A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ -5 & -5 & 1 & 11 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank}(B) = 2$ 。对 B 施以初等行、列变换 (只做整数加减与换行换列), 化为对角形:

第 1 步: 将最小非零元 1 换至 $(1, 1)$ 位—— $R_1 \leftrightarrow R_3$:

$$B \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ -5 & -5 & 1 & 11 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

第 2 步: 以 $a_{11} = 1$ 为 pivot, 消去第 1 列其余元素:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1, R_4 \leftarrow R_4 + 5R_1, R_5 \leftarrow R_5 - 2R_1,$$

再作列变换 $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_4 \leftarrow C_4 - C_1, C_5 \leftarrow C_5 - 6C_1$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

第3步：在右下角子块中取最小元 8, $R_2 \leftarrow -R_2$, 再 $R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$ 消去, 得第二 pivot 8; 继续列倍加消去同行其余元, 并删去零行零列。

第4步：整理得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对角元 $d_1 = 1, d_2 = 8$, 满足 $1 \mid 8$, 即为 B (亦即 $16 \cdot A^+A$) 在 $\mathbb{Z}$ 上的 Smith 标准型。

(4) 求 $\|e^{A^+A}\|_F$

解：

A^+A 为对称幂等阵 (投影阵), 特征值为 $1, 1, 0, 0, 0$ 。

矩阵指数与特征值同步: e^{A^+A} 的特征值为 $e, e, 1, 1, 1$ 。

A^+A 为正规阵 (对称), Frobenius 范数等于特征值模长平方和的开方:

$$\|e^{A^+A}\|_F = \sqrt{e^2 + e^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2e^2 + 3} \approx 4.2164.$$

$$\|e^{A^+A}\|_F = \sqrt{2e^2 + 3}$$

(亦可利用幂等性: $e^{A^+A} = I + (e - 1)A^+A$, 直接按定义求 Frobenius 范数, 结果相同。)

第4题 (10分)

已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 15 & 10 \\ 1 & 13 & 43 & 32 \\ 1 & 9 & 59 & 68 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的 LU 分解 (L 为单位下三角阵, U 为上三角阵)

解:

用 Doolittle 方法, 主元存入 U , 乘数 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ 存入 L 。

消第 1 列 ($u_{11} = 2$):

$$l_{21} = \frac{1}{2}, \quad l_{31} = \frac{1}{2}, \quad l_{41} = \frac{1}{2}.$$

更新后第 2 列主元 $u_{22} = 4$ 。

消第 2 列 ($u_{22} = 4$):

$$l_{32} = \frac{12}{4} = 3, \quad l_{42} = \frac{8}{4} = 2.$$

更新后第 3 列主元 $u_{33} = 4$ 。

消第 3 列:

$$l_{43} = \frac{32}{4} = 8.$$

得

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

验算: $LU = A$ 。

(2) 利用 LU 分解解 $Ax = b$

解:

令 $Ly = b$ (前代), 再令 $Ux = y$ (回代)。

前代 $Ly = b$:

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = 1 - \frac{1}{2}y_1 = 0, \\ y_3 = -1 - \frac{1}{2}y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_4 = -2 - \frac{1}{2}y_1 - 2y_2 - 8y_3 = 13. \end{cases}$$

回代 $Ux = y$:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{y_4}{2} = \frac{13}{2}, \\ x_3 = \frac{y_3 - 6x_4}{4} = \frac{-2 - 39}{4} = -\frac{41}{4}, \\ x_2 = \frac{y_2 - 12x_3 - 8x_4}{4} = \frac{0 + 123 - 52}{4} = \frac{71}{4}, \\ x_1 = \frac{y_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4}{2} = \frac{2 - \frac{71}{2} + \frac{123}{2} - 26}{2} = 1. \end{cases}$$

验算 $Ax = b$ 成立。

$$x = \left(1, \frac{71}{4}, -\frac{41}{4}, \frac{13}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$