

模拟3 解答

第1题（10分）

已知

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的 Jordan 标准型 J

解：

第一步：求特征多项式。

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 6) \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 6)[(\lambda - 4)(\lambda - 2) - 8] = (\lambda - 6)\lambda(\lambda - 6) = \lambda(\lambda - 6)^2.$$

特征值 $\lambda_1 = 0$ （代数重数 1）， $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ （代数重数 2）。

第二步：求几何重数。

对 $\lambda = 0$ ： $\text{rank}(A) = 2$ ，故 $g_0 = 3 - 2 = 1$ 。

对 $\lambda = 6$ ：

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A - 6I) = 2,$$

故 $g_6 = 3 - 2 = 1$ 。

第三步：确定 Jordan 块。

特征值	代数重数	几何重数	Jordan 块
0	1	1	$J_1(0)$
6	2	1	$J_2(6)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1(0), J_2(6))$$

(2) 求 $e^A + \ln(A^2 + E)$ 的 Jordan 标准型

解：

令 $f(x) = e^x + \ln(x^2 + 1)$ ，则 $e^A + \ln(A^2 + E) = f(A)$ （注意 $\ln(A^2 + E)$ 是对整体 $A^2 + E$ 取对数）。

求导：

$$f'(x) = e^x + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

在 Jordan 块上计算 $f(J)$ 。对 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ ，

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix} \quad (k = 2).$$

由 (1)， $J_A = \text{diag}(J_1(0), J_2(6))$ ，故

$$f(J_1(0)) = (f(0)), \quad f(J_2(6)) = \begin{pmatrix} f(6) & f'(6) \\ 0 & f(6) \end{pmatrix}.$$

其中

$$f(0) = e^0 + \ln 1 = 1, \quad f(6) = e^6 + \ln 37, \quad f'(6) = e^6 + \frac{12}{37} \neq 0.$$

因 $f'(6) \neq 0$ ， $f(J_2(6))$ 相似于 $J_2(f(6))$ 。

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^6 + \ln 37 & 1 \\ 0 & 0 & e^6 + \ln 37 \end{pmatrix}$$

亦可将 $f(6)$ 的块排在前面，等价地写为 $\text{diag}(J_2(e^6 + \ln 37), J_1(1))$ 。

第2题 (10分)

设 $P_3(t)$ 为次数 ≤ 3 的多项式全体构成的线性空间。对任意 $f(t) \in P_3(t)$ ，定义线性变换

$$T(f(t)) = f'(t) + f''(t).$$

(1) 求 $R(T)$ 的基与 $\dim N(T)$

解：

在标准基 $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ 下，逐基向量求像：

$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	$T(f)$
1	0	0	0
t	1	0	1
t^2	$2t$	2	$2 + 2t$
t^3	$3t^2$	$6t$	$3t^2 + 6t$

故

$$T(1) = 0, \quad T(t) = 1, \quad T(t^2) = 2 + 2t, \quad T(t^3) = 3t^2 + 6t.$$

$$R(T) = \text{span}\{1, 2 + 2t, 3t^2 + 6t\} = \text{span}\{1, t + 1, t^2 + 2t\} \quad (\text{约去非零常数因子}).$$

三个向量线性无关，故

$$R(T) \text{ 的一组基为 } \{1, t + 1, t^2 + 2t\}, \quad \dim R(T) = 3.$$

求核：设 $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ ，则

$$T(f) = b + 2c + (2c + 6d)t + 3dt^2 = 0 \implies b + 2c = 0, \quad 2c + 6d = 0, \quad 3d = 0,$$

得 $d = c = 0, b = 0, a$ 任意。故

$$N(T) = \text{span}\{1\}, \quad \dim N(T) = 1.$$

(亦可用秩-零化度定理验证： $\dim N(T) = 4 - 3 = 1$ 。)

(2) 将 $R(T)$ 的基扩充成 $P_3(t)$ 的一组新基

解：

$R(T)$ 的基 $\{1, t + 1, t^2 + 2t\}$ 已是 $P_3(t)$ 中三个线性无关向量。因 $\dim P_3(t) = 4$ ，再添加一个与它们无关的向量即可。

注意到 $t^3 \notin R(T)$ (T 的像最高次数为 2)，故取

$$\mathcal{B}' = \{1, t + 1, t^2 + 2t, t^3\}$$

为 $P_3(t)$ 的一组新基。

(3) 求 $1 + t + t^2 + t^3$ 在 (2) 中所求新基下的坐标

解：

设

$$1 + t + t^2 + t^3 = c_0 \cdot 1 + c_1(t + 1) + c_2(t^2 + 2t) + c_3 \cdot t^3.$$

比较系数：

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 1, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

解得 $c_2 = 1$, $c_1 = -1$, $c_0 = 2$, $c_3 = 1$ 。

坐标为 $(2, -1, 1, 1)^T$

(即 $1 + t + t^2 + t^3 = 2 \cdot 1 + (-1)(t + 1) + 1 \cdot (t^2 + 2t) + 1 \cdot t^3$ 。)

第3题 (10分)

设 $P_2(t)$ 为次数 ≤ 2 的多项式全体构成的线性空间。对任意 $f(t), g(t) \in P_2(t)$ ，定义内积

$$(f(t), g(t)) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

(1) 求多项式 $1 + t$ 的长度

解：

$$\|1 + t\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (1 + t)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^1 (1 + 2t + t^2) dt}.$$

在 $[-1, 1]$ 上， $2t$ 为奇函数，积分为 0，故

$$\|1 + t\|^2 = \int_{-1}^1 1 dt + \int_{-1}^1 t^2 dt = 2 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\|1+t\| = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(2) 记 $W = \text{span}\{1+t\}$, 求 $W^\perp$

解:

设 $p(t) = a + bt + ct^2 \in W^\perp$, 则 $(p, 1+t) = 0$, 即

$$\int_{-1}^1 (a + bt + ct^2)(1+t) dt = 0.$$

展开并利用奇函数在 $[-1, 1]$ 上积分为 0:

$$\int_{-1}^1 (a + at + bt + bt^2 + ct^2 + ct^3) dt = 2a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c = 0,$$

即 $3a + b + c = 0$ 。该方程有 2 个自由未知量, 故 $\dim W^\perp = 2$ 。

取两组无关整数解:

- $a = 1, b = 0, c = -3 \Rightarrow p_1(t) = 1 - 3t^2$;
- $a = 0, b = 1, c = -1 \Rightarrow p_2(t) = t - t^2$ 。

可验证 $(p_1, 1+t) = 0$, $(p_2, 1+t) = 0$, 且 p_1, p_2 线性无关。

$$W^\perp = \text{span}\{1 - 3t^2, t - t^2\}$$

第4题 (10分)

在线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中有下列 5 个向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $V = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $W = \text{span}\{\beta_1, \beta_2\}$ 。

(1) 证明: $\beta_2 \notin V$

解:

先将 α_3 表为 α_1, α_2 的线性组合:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_3,$$

故 $V = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\dim V = 2$ 。

按列优先向量化后, 证 $\beta_2 \notin \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 即可。设

$$\beta_2 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2,$$

得方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵作行化简:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right),$$

出现矛盾行 $0 = -\frac{1}{3}$, 方程组无解。

故 $\beta_2 \notin V$ 。

(2) 判别 $V + W$ 是否是直和, 并说明理由

解:

$\dim W = 2$ (β_1, β_2 线性无关)。

考察 $V \cap W$: 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$, 向量化后

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

行化简得 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, 故 $V \cap W = \{0\}$ 。

又 $\dim V + \dim W = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 且 $V \cap W = \{0\}$, 故

$$V + W = \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ 为直和, } V \oplus W = \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$